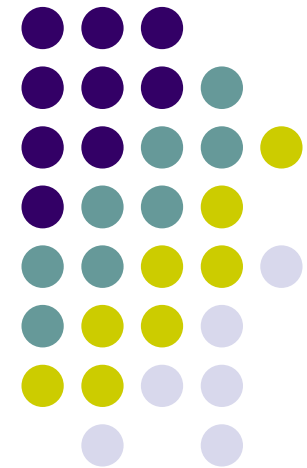


TOPOGRAFIA

Apostila 6

CÁLCULO de COORDENADAS através de POLIGONAL

Manaus, 2019

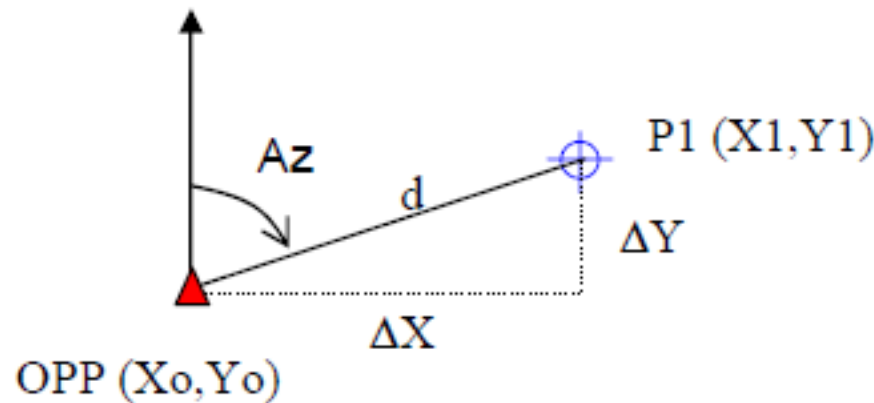


Prof. Antonio Estanislau Sanches
Engenheiro Cartógrafo

CÁLCULO DA POLIGONAL



Inicia-se o cálculo a partir do ponto de partida:



Onde:

Az: Azimute da direção OPP-P1;

d: distância horizontal entre os pontos OPP e P1;

Xo e Yo: Coordenadas do ponto OPP;

X1 e Y1: Coordenadas do ponto P1.

As coordenadas do ponto P1 serão dadas por

$$X1 = X0 + \Delta X$$

$$Y1 = Y0 + \Delta Y$$

Onde ΔX e ΔY são calculados por:

$$\Delta X = d \cdot \text{sen} (Az)$$

$$\Delta Y = d \cdot \text{cos} (Az)$$

A partir da coordenada do ponto P1 será possível calcular a coordenada do próximo ponto e assim por diante.

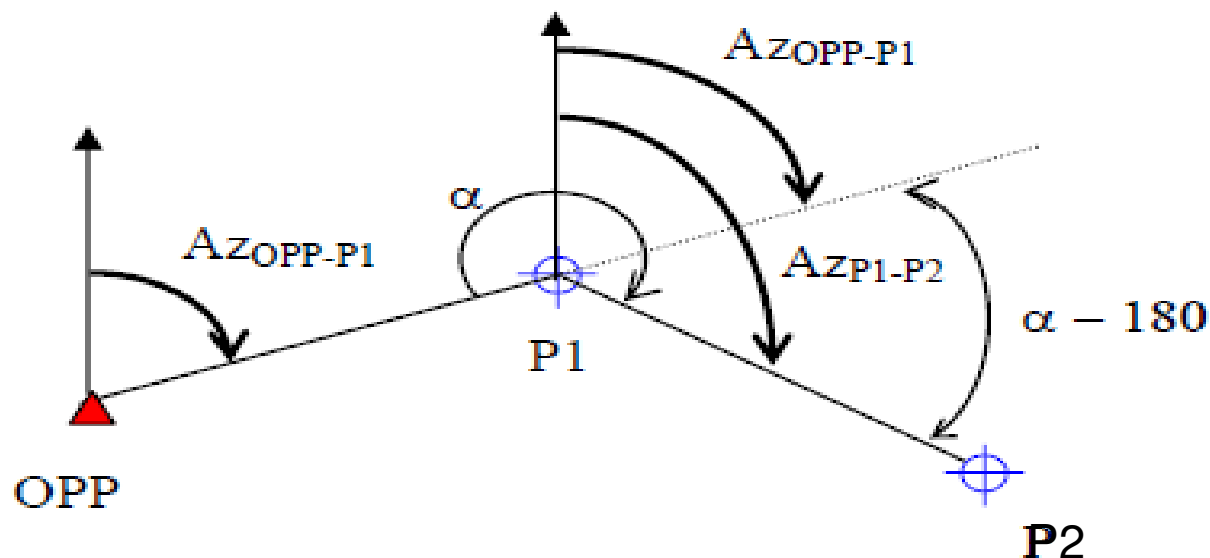
CÁLCULO DO AZIMUTE

A orientação é dada apenas para uma direção da poligonal. É preciso calcular os azimutes para todas as demais direções da poligonal, Através dos ângulos horizontais medidos em campo.



Do azimute inicial da direção OPP-P₁ e do ângulo horizontal externo OPP-P₁-P₂ (*aqui denominado de α , medido no sentido horário*) chega-se ao azimute da direção P₁-P₂.

$$AZ_{P_1-P_2} = AZ_{OPP-P_1} + \alpha - 180^\circ$$



CÁLCULO DO AZIMUTE



$$Az_{vante} = Azr_{é} + \alpha - 180^{\circ}$$

Expressão genérica para o cálculo do azimute:

$$Az_{i,i+1} = Az_{i,i-1} + \alpha - 180^{\circ}$$

-i variando de 0 a (n-1), n é o número de estações da poligonal

Se o valor do azimute for maior que 360° deve-se subtrair 360° . Se for negativo deverá ser somado 360° ao resultado.

Para ângulos medidos no sentido anti-horário, deve-se somar 180° e subtrair o valor de α do azimute.

ERRO DE FECHAMENTO ANGULAR



Para uma poligonal fechada, antes de calcular o azimute das direções, é necessário fazer a verificação dos ângulos medidos. Sendo a poligonal uma figura fechada, é possível verificar se houve algum erro na medição dos ângulos.

Num polígono qualquer, o somatório dos ângulos externos deverá ser igual a:

Soma dos ângulos medidos = $(n + 2) \cdot 180^\circ$

onde **n** é o número de estações da poligonal.

Ou

Soma dos ângulos medidos = $(n^\circ \text{ inteiros de } 180^\circ) \cdot 180^\circ$

ERRO DE FECHAMENTO ANGULAR



O erro angular (e_a) será dado por:

$$e_a = (n + 2).180^\circ - \sum_{\text{externos}}$$

$$e_a = (n^\circ \text{ inteiros de } 180^\circ) * 180^\circ - \sum_{\text{externos}}$$

Para **ângulos internos** o somatório deverá ser igual ao número de estações menos dois, multiplicado por 180° .

$$e_a = (n^\circ \text{ inteiros de } 180^\circ) * 180^\circ - \sum_{\text{externos}}$$

$$e_a = (n - 2).180^\circ - \sum \alpha$$

O erro angular será distribuído de forma **inversamente proporcional** ao tamanho dos lados, *ou seja, o menor lado, recebe a maior correção angular*; ficando o sinal da correção contrário ao sinal do erro.

TOLERÂNCIA DO ERRO DE FECHAMENTO ANGULAR



A tolerância do erro angular **TOL(ϵ)** é igual a tolerância angular do equipamento vezes a raiz quadrada do número de estações: $TOL_{\epsilon_a} = erro * \sqrt{n}$

O e_a , em módulo, deve ser menor que TOL_{ξ_a}

No DET-2 a tolerância angular (TOL_{ϵ_a}) é de 1,5'

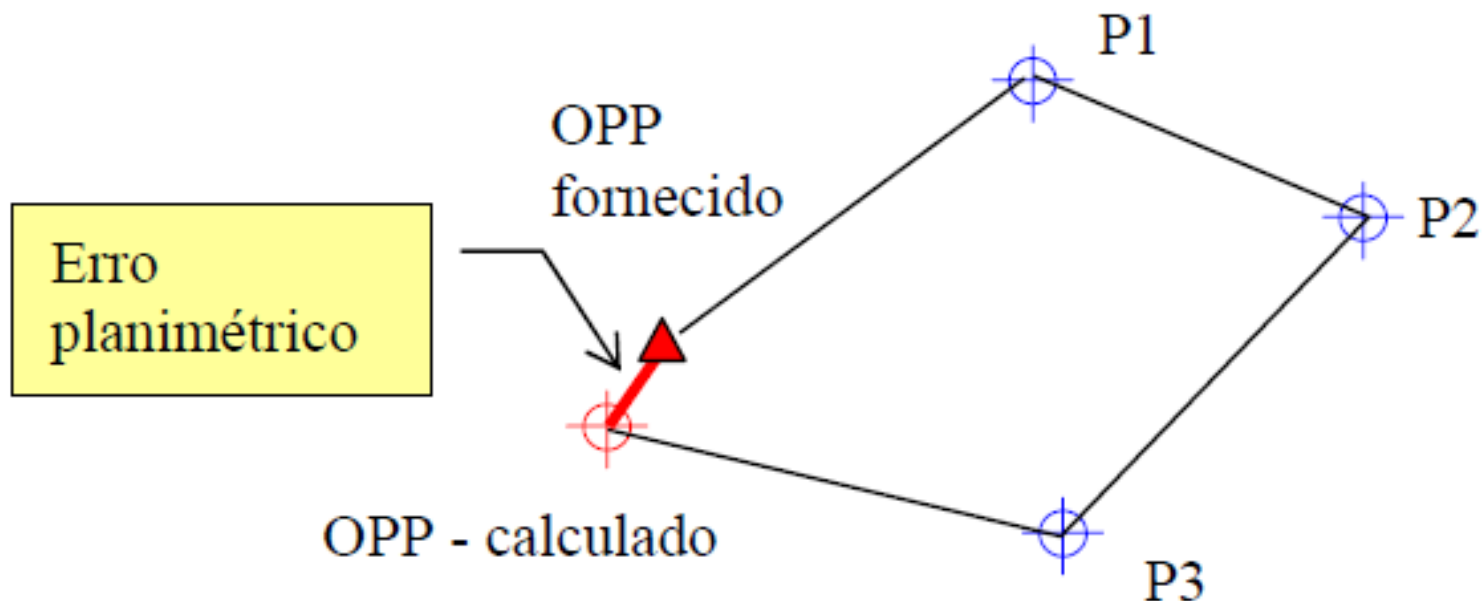
ERRO DE FECHAMENTO LINEAR

A partir do ponto de partida (OPP), calculam-se as coordenadas dos demais pontos até retornar ao ponto de partida.



$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB}) \quad N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

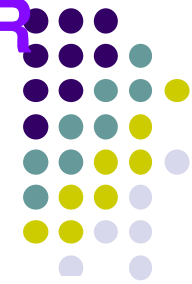
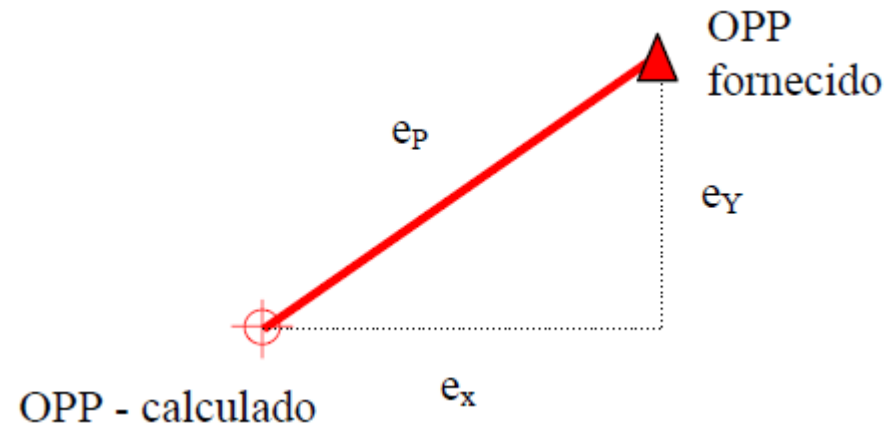
A diferença entre as coordenadas calculadas e as fornecidas para este ponto resultará no **ERRO LINEAR** ou erro planimétrico cometido.



TOLERÂNCIA DO ERRO FECHAMENTO LINEAR

Como os ângulos foram previamente ajustados, este erro decorre de imprecisões na medição das distâncias.

O erro planimétrico é decomposto em componentes na direção **E** (eixo X) e na direção **N** (eixo Y).



Os valores de $e_x = e_E$ e $e_y = e_N$ podem ser calculados por:

O **Erro Linear** e_p

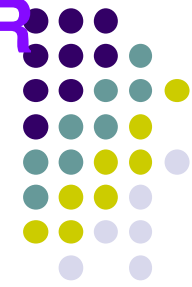
$$e_E = E_{opp}(\text{calculado}) - E_{opp}(\text{fornecido})$$

$$e_N = N_{opp}(\text{calculado}) - N_{opp}(\text{fornecido})$$

será dado por  $e_p = \left(e_E^2 + e_N^2 \right)^{1/2}$

TOLERÂNCIA DO ERRO FECHAMENTO LINEAR

PRECISÃO DA POLIGONAL

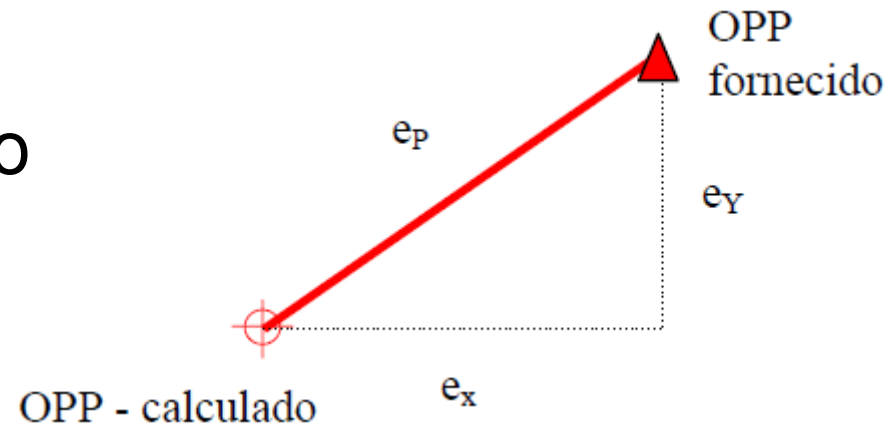


A precisão da poligonal será definida por “Z”, sendo

$$Z = \Sigma D / e_p$$

ou

Somatório das distâncias dividido pelo erro linear.



Se $Z >$ Denominador Tolerância Linear
Aceita-se o fechamento da poligonal

CORREÇÃO DO ERRO LINEAR

As correções às coordenadas serão proporcionais às distâncias medidas. Quanto maior for a distância, maior será a correção.



Cx_i : correção para a coordenada X_i

Cy_i : correção para a coordenada Y_i

Σd : somatório das distâncias

$d_{i-1,i}$: distância parcial i-j

$$Cx_i = -e_x \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$Cy_i = -e_y \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

As coordenadas corrigidas serão dadas por:

$$X_i^c = X_{i-1}^c + d_{i-1,i} \cdot \text{sen}(Az_{i-1,i}) + Cx_i$$

$$Y_i^c = Y_{i-1}^c + d_{i-1,i} \cdot \text{cos}(Az_{i-1,i}) + Cy_i$$

RESUMO DO CÁLCULO DA POLIGONAL



- Determinação das coordenadas do ponto de partida;
- Determinação da orientação da poligonal;
- Cálculo do erro de fechamento angular pelo somatório dos ângulos internos ou externos (sentido horário ou anti-horário);
- Distribuição do erro de fechamento angular;
- Cálculo dos Azimutes;
- Cálculo das coordenadas parciais (X, Y);
- Cálculo do erro de fechamento linear;
- Cálculo das coordenadas definitivas (XC, YC)..

CÁLCULO de uma POLIGONAL



Calcular as coordenadas dos pontos da poligonal (*fechada*) cujas informações de campo aparecem descritas abaixo:

Pt Ré	Estação	Pt Vante	Alfa	Distância
SAT	P 1	P 2	106° 59' 30"	60,64
P 1	P 2	P 3	143° 20' 20"	53,47
P 2	P 3	P 4	28° 20' 09"	73,41
P 3	P 4	P 1	153° 54' 48"	37,43
P 4	P 1	SAT	287° 28' 02"	

Azimute da Direção P 1 p/ S A T = 15° 28' 29"

Coordenadas P 1 => (E ; N) = (600,0 ; 750,0)

Tolerância angular = 2' m^{1/2} ; (sendo m = número de ângulos (α) medidos na poligonal)

Tolerância linear = 1 : 1.000

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$\text{Soma}_{\alpha} = 106^{\circ}59'30'' + 143^{\circ}20'20'' + 28^{\circ}20'09'' + 153^{\circ}54'48'' + 287^{\circ}28'02''$$

Somatório dos ângulos (internos) ALFA $\Rightarrow \Sigma_{\alpha} = 720^{\circ} 02' 49''$

Número de pontos medidos $\Rightarrow m = 5$

Cálculo do valor máximo do somatório de ângulos (internos) $\Rightarrow (m-1) * 180^{\circ} = 720^{\circ}$

Erro Angular $\Rightarrow \text{Erro}_{Ang} = (m-1) * 180 - \Sigma_{\alpha} \Rightarrow 720^{\circ} - 720^{\circ} 02' 49'' \Rightarrow \text{Erro}_{Ang} = - 2' 49''$

$$\text{Erro}_{Ang} = -0,04694^{\circ}$$

Correção Angular $\Rightarrow C_{Ang} = \frac{K}{Dn}$; com $n = 1, 2, 3$ e 4

$$\text{Sendo: } K = \frac{\text{Erro}_{Ang}}{\left(\frac{1}{D_1} + \frac{1}{D_2} + \frac{1}{D_3} + \frac{1}{D_4}\right)} \Rightarrow K = \frac{- 2' 49''}{\left(\frac{1}{60,64} + \frac{1}{53,47} + \frac{1}{73,41} + \frac{1}{37,43}\right)} \Rightarrow K = - 0,6215$$

$$\text{Correção Angular} \Rightarrow C_{Ang} = \frac{K}{D_1} \Rightarrow C_{Ang} = \frac{- 0,6215}{60,64} \Rightarrow C_{Ang} = - 0^{\circ} 00' 37''$$

Azimute direção P1 para SAT **15° 28' 29"**

Estação	Vante	Az _{Ré-vante(hms)}	ALFA _(hms)	Cang _(hms)	ALFA _{Corrig(hms)}
P 1	P 2		106° 59' 30"	-0° 00' 37"	106° 58' 53"
P 2	P 3		143° 20' 20"	-0° 00' 42"	143° 19' 38"
P 3	P 4		28° 20' 09"	-0° 00' 30"	28° 19' 39"
P 4	P 1		153° 54' 48"	-0° 01' 00"	153° 53' 48"
P 1	SAT		287° 28' 02"		
		Soma_α =	720° 02' 49"		
		(n-1)*180 =	720° 00' 00"		
		Erro Angular =	-0° 02' 49"		
		Calc K =	-0,6215		

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL

$$C_{ang1} = \frac{K}{D1} \rightarrow \frac{-0,6215}{60,64} \rightarrow -0^{\circ} 0' 37''$$

$$C_{ang2} = \frac{K}{D2} \rightarrow \frac{-0,6215}{53,47} \rightarrow -0^{\circ} 0' 42''$$

$$C_{ang3} = \frac{K}{D3} \rightarrow \frac{-0,6215}{73,41} \rightarrow -0^{\circ} 00' 30''$$

$$C_{ang4} = \frac{K}{D4} \rightarrow \frac{-0,6215}{37,43} \rightarrow -0^{\circ} 1' 0''$$

CÁLCULO DA POLIGONAL



1. CÁLCULO DOS AZIMUTES

$$AZ_{i,i+1} = AZ_{i-1,i} + \alpha_i - 180^\circ$$

- i variando de 0 a $(n-1)$, n é o número de estações da poligonal.
- se $i + 1 > n$ então $i = 0$;
- se $i - 1 < 0$ então $i = n$.

2. CÁLCULO DAS COORDENADAS PARCIAIS

Após o cálculo dos azimutes é possível determinar as coordenadas dos pontos intermediários.

$$X_i = X_{i-1} + d_{i-1,i} \cdot \text{sen}(AZ_{i-1,i})$$

$$Y_i = Y_{i-1} + d_{i-1,i} \cdot \text{cos}(AZ_{i-1,i})$$

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

$$Az_{vante} = Az_{ré} + \alpha - 180^\circ$$

Az _{P1-SAT} (hms)
15,2829

Coordenadas

P 1	600,00	750,00										
Estação	Vante	Az _{Ré-vante} (hms)	ALFA _(hms)	Cang _(hms)	ALFA _{Corrig} (hms)	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)	
P 1	P 2	195° 28' 29"	106° 59' 30"	-0° 00' 37"	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46	
P 2	P 3	122° 27' 22"	143° 20' 20"	-0° 00' 42"	143° 19' 38"		53,47	651,17	717,46			
P 3	P 4		28° 20' 09"	-0° 00' 30"	28° 19' 39"		73,41					
P 4	P 1		153° 54' 48"	-0° 01' 00"	153° 53' 48"		37,43					
P 1	SAT		287° 28' 02"				224,95	`= Soma				

Soma _α =	720° 02' 49"
(n-1)*180 =	720° 00' 00"
Erro Angular =	-0° 02' 49"
Calc K =	-0,6215

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

$$Az_{vante} = Az_{ré} + \alpha - 180^\circ$$

Az _{P1-SAT} (hms)
15,2829

Coordenadas

P 1	600,00	750,00										
Estação	Vante	Az _{Ré-vante} (hms)	ALFA _(hms)	Cang _(hms)	ALFA _{Corrig} (hms)	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)	
P 1	P 2	195° 28' 29"	106° 59' 30"	-0° 00' 37"	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46	
P 2	P 3	122° 27' 22"	143° 20' 20"	-0° 00' 42"	143° 19' 38"	85° 47' 00"	53,47	651,17	717,46	704,49	721,39	
P 3	P 4	85° 47' 00"	28° 20' 09"	-0° 00' 30"	28° 19' 39"		73,41	704,49	721,39			
P 4	P 1		153° 54' 48"	-0° 01' 00"	153° 53' 48"		37,43					
P 1	SAT		287° 28' 02"				224,95	`= Soma				

Soma _α =	720° 02' 49"
(n-1)*180 =	720° 00' 00"
Erro Angular =	-0° 02' 49"
Calc K =	-0,6215

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

$$Az_{vante} = Az_{ré} + \alpha - 180^\circ$$

Az _{P1-SAT} (hms)
15,2829

Coordenadas

Estação	Vante	Az _{Ré-vante} (hms)	ALFA _(hms)	Cang _(hms)	ALFA _{Corrig} (hms)	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)
P 1	P 2	195° 28' 29"	106° 59' 30"	-0° 00' 37"	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46
P 2	P 3	122° 27' 22"	143° 20' 20"	-0° 00' 42"	143° 19' 38"	85° 47' 00"	53,47	651,17	717,46	704,49	721,39
P 3	P 4	85° 47' 00"	28° 20' 09"	-0° 00' 30"	28° 19' 39"	294° 06' 39"	73,41	704,49	721,39	637,49	751,38
P 4	P 1	294° 06' 39"	153° 54' 48"	-0° 01' 00"	153° 53' 48"	268° 00' 27"	37,43	637,49	751,38	600,08	750,08
P 1	SAT	268° 00' 27"	287° 28' 02"				224,95	` = Soma			

Soma _α =	720° 02' 49"
(n-1)*180 =	720° 00' 00"
Erro Angular =	-0° 02' 49"
Calc K =	-0,6215

	E _{vante}	N _{vante}
P 1	600,00	750,00
P 2	651,17	717,46
P 3	704,49	721,39
P 4	637,49	751,38
P 1	600,08	750,08
	-0,08	-0,08
	e _E	e _N
	ep =	0,11
	Calc Z =	1.988

Coord. Partida

Coord. Chegada

erro linear por eixo

erro padrão

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



	E_{vante}	N_{vante}	
P 1	600,00	750,00	Coord. Partida
P 2	651,17	717,46	
P 3	704,49	721,39	
P 4	637,49	751,38	
P 1	600,08	750,08	Coord. Chegada
	-0,08	-0,08	erro por eixo
	e_E	e_N	
	ep =	0,11	erro padrão
	Calc Z =	1.988	

Cálculo do erro linear eixo E $\Rightarrow e_E = 600,00 - 600,08 \Rightarrow e_E = -0,08 \text{ m}$

Cálculo do erro linear eixo N $\Rightarrow e_N = 750,00 - 750,08 \Rightarrow e_N = -0,08 \text{ m}$

Cálculo do erro linear $E_p = [(e_E)^2 + (e_N)^2]^{1/2} \Rightarrow E_p = 0,11 \text{ m}$

$Z = \text{Soma lados} / E_p \Rightarrow 224,95 / 0,11 \Rightarrow Z = 1.988 > 1.000 \text{ ok}$

Distribuir os erros lineares entre as coordenadas, de forma diretamente proporcional às distâncias, zerando os erros.

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$Az_{vante} = Az_{r\acute{e}} + \alpha - 180^\circ$$

Az _{P1-SAT(hms)}
15,2829

$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

Estação	Vante	ALFA _{Corrig(hms)}	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)	C _E	C _N	E _(corrigido)	N _(corrigido)
P 1	P 2	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46	-0,02	-0,02	651,15	717,44
P 2	P 3	143° 19' 38"	85° 47' 00"	53,47	651,15	717,44						
P 3	P 4	28° 19' 39"	294° 06' 39"	73,41								
P 4	P 1	153° 53' 48"	268° 00' 27"	37,43								
P 1	SAT			224,95	= Soma							

E	N
600,00	750,00
600,08	750,08
-0,08	-0,08
e_E	e_N

Coord Original P1

Coord Calculada P1

Erro em E e N

$$Cx_i = -e_x \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$C_{E2} = (-0,08) * (60,64/224,95) \text{ ou } \mathbf{-0,02 \text{ m}}$$

$$Cy_i = -e_y \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$C_{N2} = (-0,08) * (60,64/224,95) \text{ ou } \mathbf{-0,02 \text{ m}}$$

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

Az _{P1-SAT} (hms)
15,2829

Estação	Vante	ALFA _{Corrig} (hms)	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)	C _E	C _N	E _(corrigido)	N _(corrigido)
P 1	P 2	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46	-0,02	-0,02	651,15	717,44
P 2	P 3	143° 19' 38"	85° 47' 00"	53,47	651,15	717,44	704,47	721,37	-0,02	-0,02	704,45	721,35
P 3	P 4	28° 19' 39"	294° 06' 39"	73,41	704,45	721,35						
P 4	P 1	153° 53' 48"	268° 00' 27"	37,43								
P 1	SAT			224,95	= Soma							

E	N
600,00	750,00
600,08	750,08
-0,08	-0,08
e_E	e_N

Coord Original P1
 Coord Calculada P1
 Erro em E e N

$$Cx_i = -e_x \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

C_{E2} = (-0,08)*(53,47/224,95) ou **-0,02 m**

$$Cy_i = -e_y \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

C_{N2} = (-0,08)*(53,47/224,95) ou **-0,02 m**

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

Az _{P1-SAT} (hms)
15,2829

Estação	Vante	ALFA _{Corrig} (hms)	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)	C _E	C _N	E _(corrigido)	N _(corrigido)
P 1	P 2	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46	-0,02	-0,02	651,15	717,44
P 2	P 3	143° 19' 38"	85° 47' 00"	53,47	651,15	717,44	704,47	721,37	-0,02	-0,02	704,45	721,35
P 3	P 4	28° 19' 39"	294° 06' 39"	73,41	704,45	721,35	637,45	751,34	-0,03	-0,03	637,42	751,31
P 4	P 1	153° 53' 48"	268° 00' 27"	37,43	637,42	751,31						
P 1	SAT			224,95	= Soma							

E	N
600,00	750,00
600,08	750,08
-0,08	-0,08
e_E	e_N

Coord Original P1

Coord Calculada P1

Erro em E e N

$$Cx_i = -e_x \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$C_{E2} = (-0,08) * (73,41/224,95) \text{ ou } -0,03 \text{ m}$$

$$Cy_i = -e_y \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$C_{N2} = (-0,08) * (73,41/224,95) \text{ ou } -0,03 \text{ m}$$

SOLUÇÃO do CÁLCULO da POLIGONAL



$$Az_{vante} = Az_{ré} + \alpha - 180^\circ$$

Az _{P1-SAT} (hms)
15,2829

$$E_B = E_A + D * \text{sen}(Az_{AB})$$

$$N_B = N_A + D * \text{cos}(Az_{AB})$$

Estação	Vante	ALFA _{Corrig} (hms)	Az Vante _(hms)	Distancia	E _(estação)	N _(estação)	E _(vante)	N _(vante)	C _E	C _N	E _(corrigido)	N _(corrigido)
P 1	P 2	106° 58' 53"	122° 27' 22"	60,64	600,00	750,00	651,17	717,46	-0,02	-0,02	651,15	717,44
P 2	P 3	143° 19' 38"	85° 47' 00"	53,47	651,15	717,44	704,47	721,37	-0,02	-0,02	704,45	721,35
P 3	P 4	28° 19' 39"	294° 06' 39"	73,41	704,45	721,35	637,45	751,34	-0,03	-0,03	637,42	751,31
P 4	P 1	153° 53' 48"	268° 00' 27"	37,43	637,42	751,31	600,01	750,01	-0,01	-0,01	600,00	750,00
P 1	SAT			224,95	= Soma							

E	N
600,00	750,00
600,08	750,08
-0,08	-0,08
e _E	e _N

Coord Original P1

Coord Calculada P1

Erro em E e N

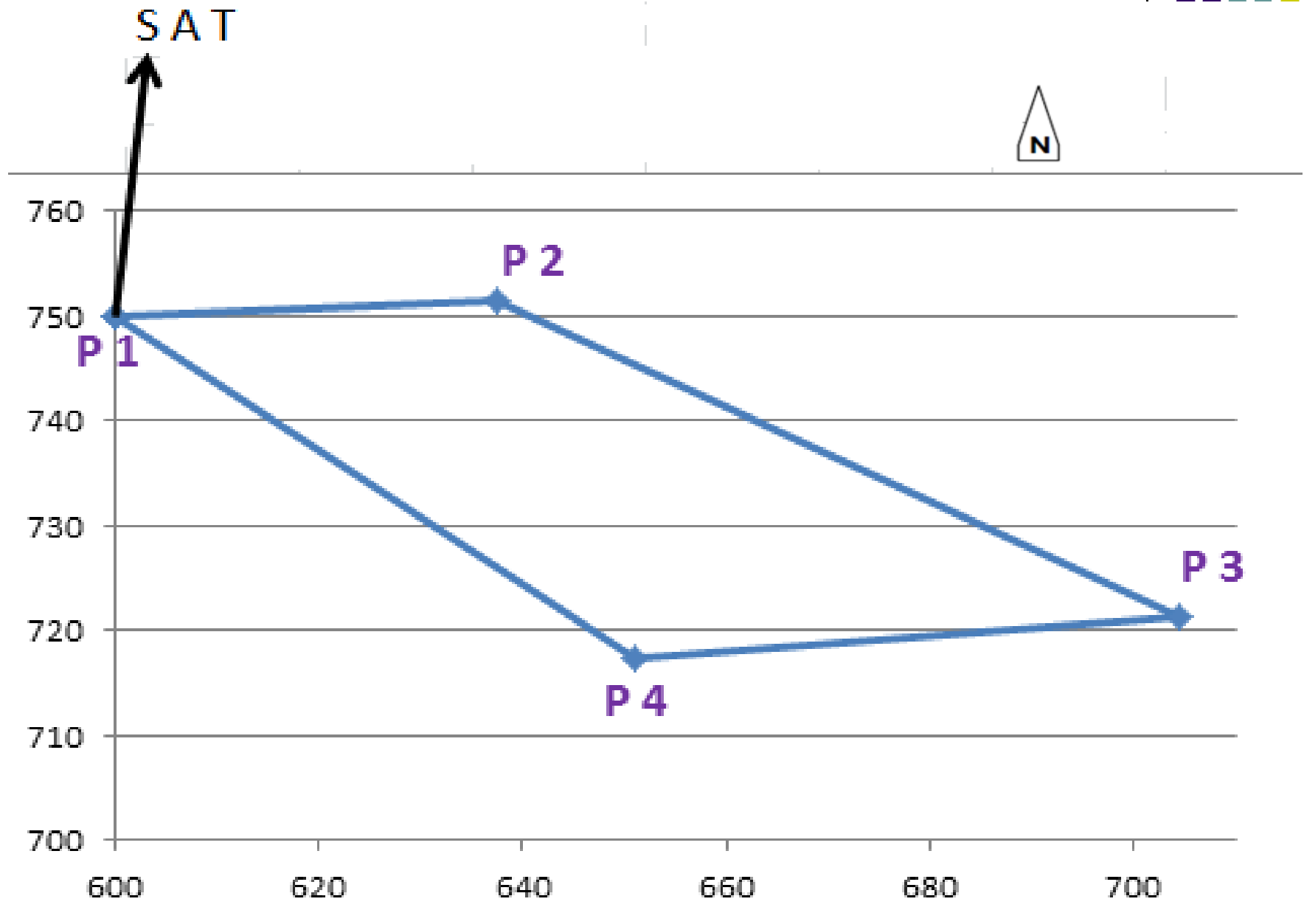
$$Cx_i = -e_x \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$C_{E2} = (-0,08) * (37,43/224,95) \text{ ou } -0,01 \text{ m}$$

$$Cy_i = -e_y \cdot \frac{d_{i-1,i}}{\Sigma d}$$

$$C_{N2} = (-0,08) * (37,43/224,95) \text{ ou } -0,01 \text{ m}$$

DESENHO da POLIGONAL





F I M